MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 12
22.1.2020

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

1. *(Herbst 2014, Thema 3, Aufgabe 5)*

   Gegeben seien die Quadriken

   $$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 3\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + 3\,x_2^2 + 6\,x_1 - 2\,x_2 + 1 = 0 \right\}$$

   und

   $$Q_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + t\,x_2^2 - 2\,t\,x_2 + t - 1 = 0 \right\},$$

   wobei t ein reeller Parameter ist. Für welchen Werte von t sind Q und Q_t kongruent (d.h. euklidisch äquivalent)? Geben Sie in diesem Fall eine Bewegung $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ an mit $h(Q_t) = Q$.

2. *(Herbst 2019, Thema 1, Aufgabe 2)*
   Sei Q_s die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

   $$Q_s \;:\quad x^2 + 2xy + (s+1)y^2 + 2x - (2s^2 - 2)y + 1 = 0.$$

   Bestimmen Sie den affinen Typ von Q_s in Abhängigkeit von s.

3. In $\mathbb{R}^2$ sei die Quadrik

   $$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \right\} = 0$$

   gegeben mit $A = A^T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$.
   Sei $m \in \mathbb{R}^2$ mit $2A \cdot m + b = \binom{0}{0}$. Zeigen Sie, daß für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Q \quad \Longrightarrow \quad 2\,m - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Q.$$

   (Damit ist m also ein Mittelpunkt von Q.)

4. Seien $\varnothing \neq Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^2$ zwei Quadriken und $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine Affinität mit $h(Q_1) = Q_2$. Zeigen Sie für $m \in \mathbb{R}^2$:

   $$m \text{ ist Mittelpunkt von } Q_1 \quad \Longrightarrow \quad h(m) \text{ ist Mittelpunkt von } Q_2.$$

Abgabe bis 29.1.2020, 14:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).